

Étude de la géométrie d'un déflecteur à neige

François Perron, ing.,
Département des techniques du génie électrique,
Cégep de l'Outaouais,
Gatineau, Québec, J0V 1W0 Canada,
francois.perron@cegepoutaouais.qc.ca

23 août 2013

Résumé

Un modèle de déflecteur vertical est dérivé à partir des besoins des opérateurs de la machinerie et des équations d'équilibre statique. Le mouvement est vérifié en termes de déplacement limite sans interférence. Une optimisation des paramètres est proposée pour un type précis de souffleuse.

L'optimisation permet de garantir un angle d'éjection de la neige variant de 0° à 180° dans le plan d'élévation vertical.

Le modèle est généralisé pour étudier les performances de configurations alternatives.

1 Introduction

Le déflecteur vertical de chute à neige est un assemblage de tôle pliée qui possède deux articulations. Monté au bout d'une chute rotative, il permet de choisir l'angle d'élévation de la projection de la neige de la souffleuse. La figure 1 présente un exemple de chute sous divers angles.

La commande de cet assemblage doit permettre à un opérateur de contrôler le profil d'éjection de la neige sans toutefois compromettre la rapidité d'ajustement de l'ensemble. Une déflexion complète en moins de 2 secondes semble être une limite acceptable.

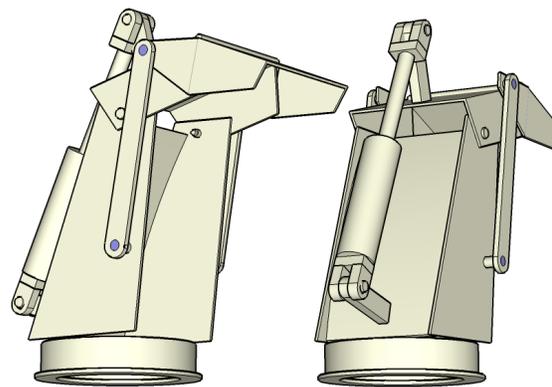


FIGURE 1 – Modèle 3D de la chute à neige.

La précision d'ajustement doit aussi être conservée de façon à permettre le positionnement de la zone d'atterrissage de la neige soufflée par l'opérateur dans une plage variant entre quelques cm à plus de 10m de la souffleuse. On veillera à assurer la linéarité du déplacement du point contact de la neige au sol sur la plage de déflexion obtenue par le déflecteur vertical pour faciliter les réglages de la chute par l'opérateur ¹.

La commande du déflecteur vertical doit permettre une déflexion de l'angle final de la chute d'au moins 180° par rapport à l'axe de rotation de la chute. De plus, cette commande doit être activée par un seul levier accessible à l'opérateur.

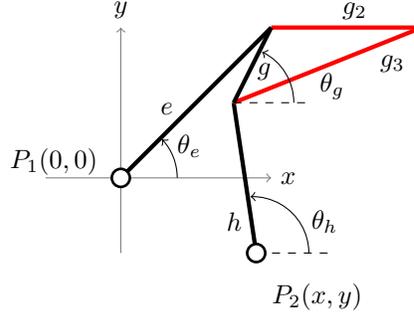


FIGURE 2 – Modèle des segments et repérage.

2 Description de l'assemblage

La figure 2 présente un modèle en deux dimensions des segments principaux servant à décrire le mouvement des pièces de la chute. Les segments e , g et h sont liés entre-eux ainsi qu'avec les points P_1 et P_2 par des joints rotatifs aux extrémités. Dans l'opération de la chute, on fait varier l'angle θ_e , ce qui entraîne la rotation et la translation simultanée du triangle g , g_2 et g_3 ².

2.1 Système de coordonnées

Le système est muni d'une tringlerie activée par un cylindre hydraulique. Toutes les pièces du système sont considérés comme des corps rigides et la rotation des joints est liée de telle sorte que l'assemblage complet ne comporte qu'un seul degré de liberté.

Les deux axes pivotants qui relient les déflecteurs étant parallèles, toutes les équation de ces mouvements de tringlerie se décrivent dans un espace à deux dimensions. De plus, comme le rotateur de la chute est orthogonal aux deux axes des déflecteurs, sa rotation n'a pas d'influence sur l'angle vertical de

1. On assume que le sol est un plan idéal et perpendiculaire à l'axe de rotation de la chute. La trajectoire de la neige projetée est considéré essentiellement parabolique avec une dispersion conique variant selon les types de neige et les conditions atmosphériques.

2. Le cylindre hydraulique éleveur de la chute applique une force linéaire sur le bout d'un levier solidaire du segment e et, en conséquence, génère un couple au point P_1 .

chute de la neige. On choisit donc le plan perpendiculaire aux deux axes de déflexion, sur une face latérale des déflecteurs, comme référence de position. L'origine $(0,0)$ du système de coordonnées est placée au centre du pivot du premier déflecteur tel qu'indiqué à la figure 2.

3 Modèle mathématique

3.1 Système d'équations statiques

En équilibre statique, la somme des forces est nulle selon les deux axes, ce qui se traduit par les équations :

$$\sum F_x = 0 \quad \text{et} \quad \sum F_y = 0 \quad (3.1.1)$$

Au repos, la somme des moments autour des points de rotation est aussi nulle, ce qui se traduit par les équations :

$$\sum \tau_{P_1} = 0 \quad \text{et} \quad \sum \tau_{P_2} = 0 \quad (3.1.2)$$

Pour résoudre les équations 3.1.1 et 3.1.2, on doit aussi introduire les points de réaction.

En choisissant un des points de pivot comme origine, on peut aussi décomposer les membrures e , g et h selon leurs composantes en x et y pour trouver les deux équations suivantes :

$$x = e \cos \theta_e + g \cos \theta_g - h \cos \theta_h \quad (3.1.3a)$$

$$y = e \sin \theta_e + g \sin \theta_g - h \sin \theta_h \quad (3.1.3b)$$

On obtient un système d'équations trigonométriques qui lient la position des points de rotation fixes, P_1 et P_2 , avec les longueurs des membrures e , g et h ainsi qu'avec les angles θ_e , θ_g et θ_h .

À chaque combinaison C_n de paramètres, telle que $C_n = (x, y, e, g, h)$ peut correspondre³ une version des équations 3.1.3 donnant une gamme de déflexions intéressantes pour l'angle θ_g en fonction de θ_e . En effet, comme les paramètres de C_n sont choisis à la conception de la chute, on les considère comme des constantes ce qui transforme, pour cette configuration, les équations 3.1.3 en un système à deux équations et trois inconnues :

$$K_1 = K_2 \cos(\theta_e) + K_3 \cos(\theta_g) - K_4 \cos(\theta_h) \quad (3.1.4a)$$

$$K_1 = K_2 \sin(\theta_e) + K_3 \sin(\theta_g) - K_4 \sin(\theta_h) \quad (3.1.4b)$$

Il est donc possible, en résolvant l'équation 3.1.4 pour un C_n donné, de faire correspondre un angle de sortie de chute, $\theta_g + \alpha$ ⁴, à une plage de l'angle θ_e commandé par le cylindre hydraulique.

L'angle θ_h sera éliminé des équations 3.1.4.

Notons, au passage, que la membrure g_2 , dont la surface adjacente demeure essentielle comme déflecteur pour la neige, n'intervient pas dans les équations de la position, puisque les segments g , g_2 et g_3 constituent un triangle rigide. Seuls g et l'angle θ_g sont utilisés pour déterminer la position du deuxième volet de la chute. On retrouve l'angle du segment g_2 par rapport au plan horizontal du sol avec la formule suivante :

3. Certaines combinaisons de valeurs n'ont pas de sens physique : e.g. les segments sont trop courts ou trop longs pour pouvoir être reliés entre eux sans les déformer.

4. L'angle α est une constante qui permet d'exprimer l'angle réel de la sortie de la chute par rapport au sol et est facilement identifiable pour chaque configuration, voire l'équation 3.1.5

$$\theta_{g_2} = \theta_g + \alpha \quad (3.1.5)$$

3.2 Lien entre θ_g et θ_e

L'objectif est de trouver une fonction reliant θ_g et θ_e , telle que :

$$\theta_g = f(\theta_e), \quad \forall \theta_e \in R \quad (3.2.1)$$

En pratique, on se limitera à la plage d'entrée de θ_e qui permettra de diriger la neige directement au sol et jusqu'à quelques degrés de la verticale.

À partir de l'identité trigonométrique suivante :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (3.2.2)$$

on réécrit la partie b l'équation 3.1.3 pour isoler le terme $\sin \theta_h$:

$$\sin \theta_h = \frac{e \sin \theta_e + g \sin \theta_g - y}{h} \quad (3.2.3)$$

et l'exprimer en terme de $\cos \theta_h$ en substituant d'après 3.2.2 :

$$\cos \theta_h = \sqrt{1 - \left(\frac{e \sin \theta_e + g \sin \theta_g - y}{h} \right)^2} \quad (3.2.4)$$

En recombinant 3.2.4 dans la partie a de 3.1.3, on obtient une seule équation qui ne contient que des angles en θ_e et en θ_g :

$$e \cos \theta_e + g \cos \theta_g - x = h \sqrt{1 - \left(\frac{e \sin \theta_e + g \sin \theta_g - y}{h} \right)^2} \quad (3.2.5)$$

qui, portée au carré donne⁵ :

5. On portera attention à la combinaison des signes des deux membres de l'équation, puisque cette information est perdue dans la mise au carré si on travaille sans les nombres complexes. L'inversion de signe représente des situations où les membrures sont dans des configurations non souhaitables et, en général, non-compatibles avec l'application. C'est le cas pour toutes les configurations où le joint $g-h$ traverse à droite du segment de droite qui passe par $g-g_2$ et P_2 . Le triangle $g-g_2-g_3$ s'inverse alors et le flux de neige éjectée ne touche plus à la surface associée à g_2 du dernier déflecteur.

$$(e \cos \theta_e + g \cos \theta_g - x)^2 = h^2 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{e \sin \theta_e + g \sin \theta_g - y}{h} \right)^2} \right)^2 \quad (3.2.6)$$

et, après expansion et regroupement des termes :

$$(2eg \cos \theta_e - 2gx) \cos \theta_g + (2eg \sin \theta_e - 2gy) \sin \theta_g + e^2 + g^2 + x^2 + y^2 - h^2 - 2ex \cos \theta_e - 2ey \sin \theta_e = 0 \quad (3.2.7)$$

Soit le changement de variable suivant :

$$(S_1) \begin{cases} u &= 2eg \sin \theta_e - 2gy \\ v &= 2eg \cos \theta_e - 2gx \\ w &= e^2 + g^2 + x^2 + y^2 - h^2 \\ &- 2ex \cos \theta_e - 2ey \sin \theta_e \end{cases} \quad (3.2.8)$$

On observe dans 3.2.8 que les termes u , v et w ne dépendent que de θ_e . En effectuant le changement de variable dans 3.2.7, on obtient l'équation trigonométrique :

$$u \sin \theta_g + v \cos \theta_g + w = 0 \quad (3.2.9)$$

Cette équation, de la forme $f(\theta_e, \theta_g) = 0$ est juste mais ne permet pas d'exprimer directement θ_g en fonction de θ_e comme souhaité en 3.2.1.

On peut exprimer 3.2.9 par une équation de forme quadratique dont les zéros permettront ensuite d'exprimer directement θ_g à partir d'une fonction de θ_e . Pour ce faire, on remplace le terme $\sin \theta_g$ par son équivalent en cosinus d'après l'identité du cercle 3.2.2.

La mise au carré⁶ de 3.2.2 dans 3.2.9 donne :

$$\left(\sqrt{1 - \cos^2 \theta_g} \right)^2 = \left(\frac{-v \cos \theta_g - w}{u} \right)^2 \quad (3.2.10)$$

6. Ici aussi, la mise au carré risque de faire perdre certaines informations sur le problème. Il faudra vérifier à quoi correspondent les solutions de signe opposés pour s'assurer de garder des réponses valides. À développer...

et, après expansion et regroupement :

$$(u^2 + v^2) \cos^2 \theta_g + 2vw \cos \theta_g + w^2 - u^2 = 0 \quad (3.2.11)$$

Cette équation quadratique en terme de $\cos \theta_g$ décrit le système mécanique pour tous les angles θ_e dans une configuration C_n choisie. En fait, la variation de l'angle θ_e génère une famille de courbes quadratiques dont les zéros correspondent à la valeur du cosinus d'un angle de sortie θ_g possible. On considère seulement les zéros réels, puisqu'ils correspondent à une solution physiquement réalisable.

Pour finalement exprimer l'équation sous la forme $\theta_g = f(\theta_e)$, on utilise la forme générale de l'expression des racines d'un polynôme du second degré, soit :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.2.12)$$

et on remplace en identifiant les termes depuis 3.2.11 selon le changement de variables :

$$(S_2) = \begin{cases} a &= u^2 + v^2 \\ b &= 2vw \\ c &= w^2 - u^2 \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Ainsi, 3.2.13 dans 3.2.12 donne :

$$\cos \theta_g = \frac{-(u^2 + v^2) \pm \sqrt{4v^2w^2 - 4(u^2 + v^2)(w^2 - u^2)}}{2(u^2 + v^2)} \quad (3.2.14)$$

Donc, $\theta_g = f(\theta_e)$ devient :

$$\theta_g = \arccos \frac{-(u^2 + v^2) \pm \sqrt{4v^2w^2 - 4(u^2 + v^2)(w^2 - u^2)}}{2(u^2 + v^2)} \quad (3.2.15)$$

ce qui correspond à l'équation recherchée.

4 Vérification du modèle

Un modèle numérique est construit pour vérifier la validité des équations. Ce modèle est utilisé pour valider les valeurs des paramètres d'une configuration. La configuration C_1 présentée a pour paramètres :

$$C_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e \\ g \\ g_2 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (4.0.16)$$

Trois éléments graphique se sont avérés utiles dans l'identification de configuration candidates C_n .

Le modèle affiche, pour une plage de θ_e donnée, les valeurs corrigées de θ_g de façon à ce que 0° corresponde à l'horizontale.

Le premier de ces graphiques, à la figure 3, reproduit la position des membrures pour des valeurs de θ_e variant de 88° à 16° . On remarque que la déflexion de la neige se règle sur un intervalle couvrant environ 147° , ce qui représente un avantage (gain) mécanique de A_m :

$$A_m = \frac{\theta_{ef} - \theta_{ei}}{\theta_{gf} - \theta_{gi}} = \frac{79,95 - (-69,33)}{88 - 16} = \frac{149,28}{72} = 2,07 \quad (4.0.17)$$

Ce gain, tel qu'en fait foi la figure 4, n'est pas exactement linéaire.

Les familles de courbes quadratiques, présentées à la figure 5 permettent de se faire une idée de la répartition des solutions : les paraboles qui ne traversent pas l'axe des x , comportent des zéros complexe conjugués. En conséquence, les angles θ_e pour lesquels les paraboles sont au-dessus de cet axe ne sont pas utilisables car le mécanisme bloque ou peut ne pas être réalisable physiquement.

Les courbes quadratiques permettent d'entrevoir la linéarité de la réponse en suivant la répartition des points d'interception des courbes avec l'abscisse. La majorité des courbes présentent deux solutions. Ces solutions correspondent en général à une configuration pour laquelle le déflecteur est renversé.

5 Optimisation

On cherche à trouver des familles de solutions C_n qui permettent :

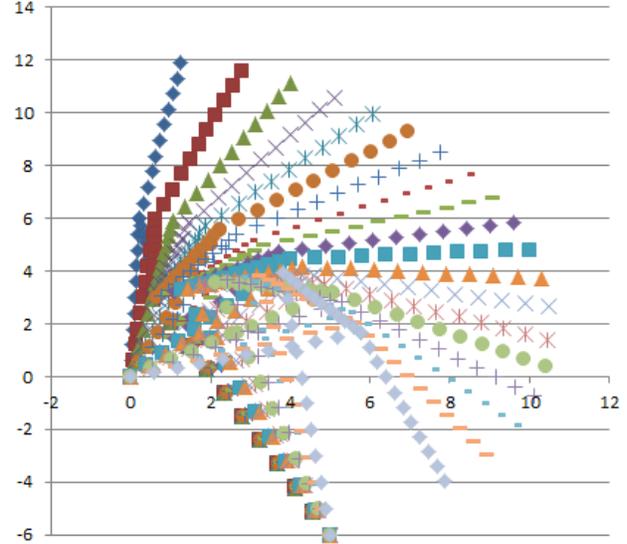


FIGURE 3 – Mouvement du mécanisme.

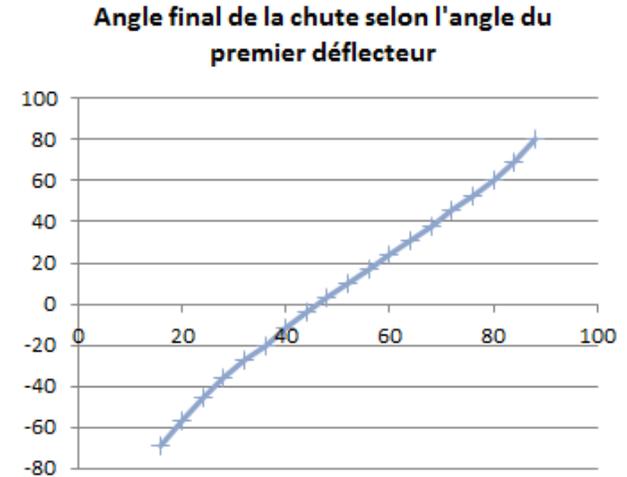


FIGURE 4 – Évolution des angles, θ_e en abscisse et θ_g (corrige) en ordonnée.

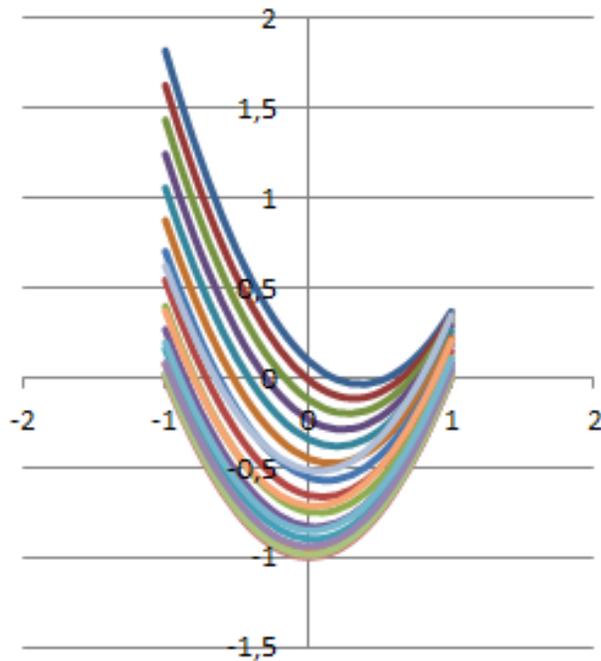


FIGURE 5 – Famille des courbes quadratiques dont les zéros sont des solutions.

- de maximiser la plage des angles utilisables de θ_{g_2} entre 90° et -90° ;
- de garder une correspondance quasi-linéaire entre θ_e et θ_g ;
- d'éviter les coincements ou les ambiguïtés du mécanisme dans certaines positions critiques ;

Je manque de temps, mais il serait intéressant de passer par un algorithme génétique pour sélectionner les paramètres répondant le mieux aux objectifs cités en introduction. Il est relativement facile d'imaginer un ensemble de critères de performance liés à des caractéristiques recherchées pour constituer une fonction de sélection naturelle ou un système de pointage permettant l'optimisation automatique de la configuration C_n .

Voici, en attendant, des configurations classiques utilisées dans l'industrie qui ont été optimisées de façon empirique en gardant l'oeil sur les faisceaux de courbes quadratiques pour allonger la plage d'opération utile et rencontrer les critères de qualité énoncés en introduction...

Soit la configuration C_2 :

$$C_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e \\ g \\ g_2 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (5.0.18)$$

(... ajouter C2 ici ...)

6 Généralisation du problème

Le mécanisme décrit est une topologie classique en éléments de machines⁷ et correspond à des applications aussi étonnantes que variées.

L'anglais fournit une catégorisation précise de ces mécanismes : celui qui nous préoccupe ici se nomme un "four-bar, one degree of freedom linkage".

L'article wikipedia "Mechanical linkages"[3] fournit des exemples communs de ce mécanisme spécifique, dont les très populaires pinces-étai "Vise-Grip" !

7. À la grande surprise de l'auteur...

7 Conclusion

L'expression de l'équation $\theta_g = f(\theta_e)$ a été réalisée et vérifiée à l'aide d'un modèle numérique. Les diverses positions obtenues du modèle permettent d'observer que toutes les membrures se déplacent conformément à des corps rigides tandis que les joints demeurent centrés dans leurs axes pour toutes les valeurs de θ_e que le mécanisme admet. De plus, une progression régulière des l'angle d'entrée θ_e provoque une progression monotonique et régulière de l'angle de sortie θ_g sur toute la plage. En ce sens la modélisation est réussie.

La configuration C_1 proposée possède un gain mécanique moyen de 2.07 et la déflexion maximale en sortie est de 147° . Ainsi :

$$\Delta\theta_e = 88^\circ \Rightarrow \Delta\theta_g = 147^\circ \quad (7.0.19)$$

La déflexion maximale de la configuration C_1 est donc inférieure au 180° désirés. À l'évidence, le mécanisme reste fonctionnel et utilisable en pratique, on veillera à clarifier la spécification de ce paramètre...

Le mécanisme demeure légèrement non-linéaire et une étude plus poussée de la courbe décrite par l'extrémité du déflecteur permettrait d'en expliquer la raison. Une autre étude pourrait étudier des configurations C_n alternatives qui génèrent des familles de courbes beaucoup moins linéaires. Par exemple, un appariement entre l'angle de sortie de la chute, la trajectoire parabolique de la neige et la position du point de contact au sol pourrait mener à une réponse perçue comme optimale par un opérateur dont la tâche est de positionner ce point de chute à l'aide de la commande hydraulique.

Le fait que les équations quadratiques obtenues puissent déterminer, par leur type de racines, la possibilité de réaliser ou non un prototype physique du mécanisme reste un élément de fascination pour l'auteur !

Une modélisation de l'écoulement de la neige dans le mécanisme permettrait d'identifier les forces de réaction en présence et permettrait de dimensionner les éléments mécaniques en fonction des contraintes subies. La réaction sur la chute de l'éjection de la neige ⁸

8. Une souffleuse se déplaçant à $0,5m/s$ dans de la neige

est assurément assez importante pour justifier l'utilisation de structures en acier, mais qu'en est-il du frottement et de l'usure des surfaces ?

Finalement, le tout a été fait dans le but de réactiver et de se réappropriier des connaissances en géométrie, en physique et dans la production d'articles à l'aide de \LaTeX . L'auteur utilisera fort probablement ce modèle pour convertir la chute de sa vieille souffleuse pour la saison 2013-2014, évitant ainsi le taponnage habituel dans l'atelier, sous le regard moqueur de ses voisins ;-).

Références

- [1] Les propriétés de la neige — Eumetcal, the european virtual organisation for meteorological training, 2013. [En-ligne ; accès le 25 avril 2013].
- [2] Douglas C. Giancoli. *Physique générale 1 : Mécanique et thermodynamique*. De Boeck Wesmael S.A., Bruxelles, Belgique, 1989.
- [3] Wikipedia. Linkage (mechanical) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2013. [En-ligne ; accès le 25 avril 2013].

accumulée sur une épaisseur de $30cm$ engouffre, sur sa largeur de $2m$, environ $0,3m^3$ de neige par seconde. De la neige printanière chargée d'eau peut atteindre la densité de $500 kg/m^3$ [1]. La souffleuse propulse alors près de $150kg$ de matière à chaque seconde. Si on estime la surface du flux de neige à $100cm^2$, on obtient une vitesse moyenne de sortie de $30m/s$. Une masse de $150kg$ se déplaçant à $30m/s$ possède une énergie cinétique de $67,5kJ$, ce qui demande une puissance continue de $90HP$ pour la mobiliser ! Par ailleurs, la force d'éjection correspond alors à

$$F = \partial \vec{p} / \partial t = \frac{150kg \cdot 30m/s}{1s} = 4500N, [2, p.227] \quad (7.0.20)$$

soit plus de $1000lbs$ de poussée.